UNIVERSITETET I OSLO
Det matematisk–naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i AST2110 — Universet

Eksamensdag: Onsdag 8. juni 2005

Tid for eksamen: 14.30 – 17.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: "Matematisk formelsamling"
Øgrim og Lian: "Størrelser og enheter i fysikk og teknikk"
Godkjent kalkulator
To A4-ark (du kan skrive på begge sider) med dine egne notater

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Et romskip forlater jorden ved tiden $t = 0$ på sin rettlinjede vei mot den nærmeste stjernen, Proxima Centauri, som er i avstand 1,3 pc. Romskipet starter med farten $v = 0$ og har under første del av reisen konstant akselerasjon $g = 9,8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, målt i romskipets instantane inertialsystem. Denne delen av reisen er del i.

Da romskipet er halvveis til Proxima Centauri endres akselerasjonen plutselig til $-g$, slik at romskipet bremses. Vi starter nå reisens del ii med konstant descelerasjon $-g$ som varer til romskipet kommer frem til Proxima Centauri med fart eksakt lik $v = 0$.

Romskipet snur straks og reiser tilbake til jorden på samme måte, slik at det har akselerasjon $g = 9,8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ mot jorden i reisens fase iii og $-g$ i fase iv, og ender den fjerde fasen ved å nå jorden med fart $v = 0$.

Firerhastighet er definert ved

$$U_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = \gamma(u)(c, \mathbf{u}),$$

og fireakselerasjon ved

$$A_\mu = \frac{dU_\mu}{d\tau} = \gamma^4(u)\left(\vec{\beta}\cdot\mathbf{a}, \mathbf{a} + \vec{\beta}\times(\vec{\beta}\times\mathbf{a})\right),$$

hvor τ er egentid, $\mathbf{u} = d\mathbf{x}/dt$, $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt$, $\vec{\beta} = \mathbf{u}/c$ og $\gamma(u) = (1-\beta^2)^{-1/2}$. Man kan vise at

$$A^\mu A_\mu = \gamma^6(u)\left[a^2 - (\vec{\beta}\times\mathbf{a})\cdot(\vec{\beta}\times\mathbf{a})\right]$$

og

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c^2}.$$

a) Vis at vi i del i av reisen har at $\gamma^3(v)dv/dt = g$ og $d(\gamma v)/dt = \gamma^3 dv/dt$. Bruk dette til å vise

$$v = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}}}$$

og

$$x = \frac{c^2}{g}\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - \frac{c^2}{g}.$$

b) Hvor lang tid tar det, målt i jordens inertialsystem, fra romskipet forlater jorden til det er tilbake på jorden igjen? 1pc $= 3,0856 \times 10^{16}$m og $c = 2,9979 \times 10^8 \mathrm{m\,s^{-1}}$.

c) Vis at under del i av reisen er forholdet mellom tiden målt i romskipets referansesystem (egentiden for romskipet) τ og tiden målt i jordens referansesystem t gitt ved

$$\tau = \frac{c}{g}\mathrm{arsinh}\left(\frac{gt}{c}\right),$$

og finn hvor lang tid hele reisen frem og tilbake fra jorden tar for en astronaut som er med i romskipet.

Oppgave 2

a) Det er vist at rotasjonshastigheten for spiralgalakser er konstant ved store avstander. Vis hvordan dette kan forklares ved en mørk kuleformet halo der tettheten er $\propto r^{-2}$. Hvordan avtar tettheten av stjerner utover i skiven?

b) Beskriv kort årsakene til at planetene nær solen har høyere tetthet enn planetene langt fra solen.

c) Hva mener vi med luminositetsavstand? Kan du nevne noen grunner til at den for kosmologiske avstander ikke er identisk med den avstanden vi ville målt med målestaver (metrikkavstanden)?

d) Mars bruker 687 døgn på et omløp rundt solen (siderisk). Hvor lang tid tar det fra Mars er nærmest jorden (i opposisjon) en gang til neste gang den er nærmest jorden?

e) Hva mener vi med Schwarzschildradien?